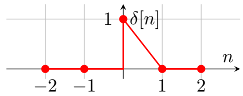
信号与 δ 函数卷积的证明

$$x[n] * \delta[n] = x[n]$$

一、解析推导

1. δ 函数定义

离散 δ 函数定义为：$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$



2. 卷积定义

两个离散序列 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积为：$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n-m]$

3. 证明 $x[n] * \delta[n] = x[n]$

步骤 1： 令 $h[n] = \delta[n]$，代入卷积公式：$y[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n-m]$

步骤 2： 分析 $\delta[n-m]$ 项：当 $n-m=0$ 即 $m=n$ 时，$\delta[n-m]=1$；当 $m \neq n$ 时，$\delta[n-m]=0$

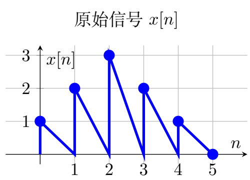
步骤 3： 因为只有 $m=n$ 时非零，所以：$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n-m] = x[n] \cdot \delta[0] = x[n] \cdot 1 = x[n]$

结论： $\boxed{x[n] * \delta[n] = x[n]}$

δ 函数是卷积运算的**恒等元**，这一性质称为**筛选性质**：δ 函数在每个时刻 n” 筛选” 出信号值 $x[n]$。

二、动画演示

例题信号： 三角形脉冲 $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n = 1 \\ 3, & n = 2 \\ 2, & n = 3 \\ 1, & n = 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$



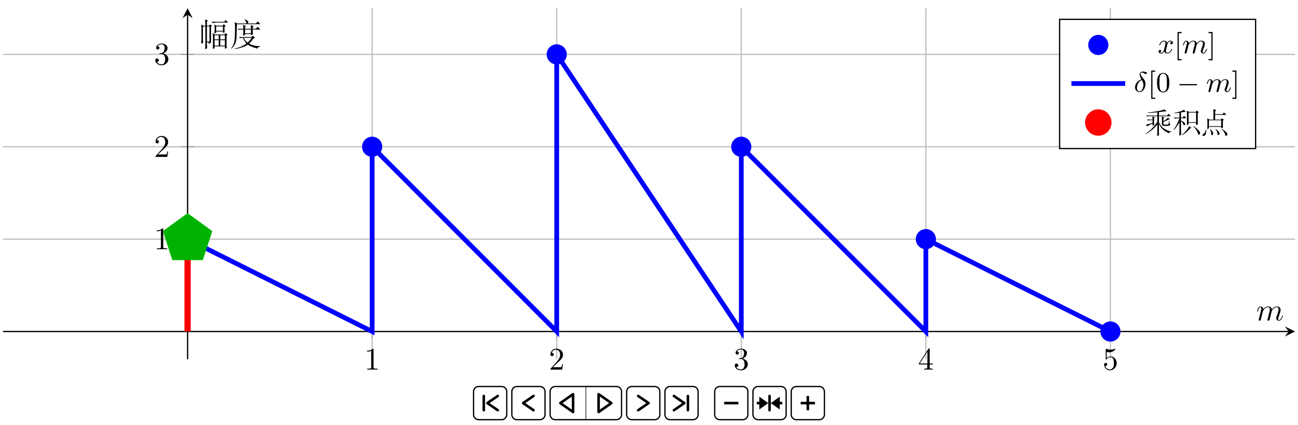
卷积公式：

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n-m]$$

动画说明： 下方动画展示 $\delta[n-m]$ 如何在 m 轴移动，在每个时刻 n 的位置 $m=n$ 处” 筛选” 出 $x[n]$ 的值。

（在 *Adobe Acrobat* 中打开可播放）

计算 $y[0] = \sum_m x[m] \cdot \delta[0-m]$



动画观察：从动画可以看出，在每个时刻 n，$\delta[n-m]$ 出现在 $m=n$ 位置，乘积 $x[m] \cdot \delta[n-m]$ 仅在 $m=n$ 时非零，因此 $y[n] = x[n]$，输出信号与输入信号完全相同。

结果总结表：

时刻 n	$\delta[n-m]$ **位置**	$x[n]$	$y[n]$
0	$m=0$	1	1
1	$m=1$	2	2
2	$m=2$	3	3
3	$m=3$	2	2
4	$m=4$	1	1

关键要点：

- δ 函数的筛选性质保证了 $x[n] * \delta[n] = x[n]$
- $\delta[n]$ 是卷积运算的恒等元
- 类比：卷积中的 $\delta[n]$ 就像乘法中的 1
- 应用：冲激响应、采样理论、信号分析